NIKLAS LUHMANN GYMNASIUM Oerlinghausen

Schulinterner Lehrplan
Zum Kernlehrplan für die gymnasiale Oberstufe

Mathematik

Fassung vom 11.03.2026

Schulinterner Lehrplan für die gymnasiale Oberstufe – Einleitung

Das Fach Mathematik in der Oberstufe vermittelt den Schülerinnen und Schülern grundlegende mathematische Kompetenzen, die eine wichtige Grundlage für ein Hochschulstudium oder eine anspruchsvolle Berufsausbildung darstellen. Darüber hinaus ist das Fach Mathematik geeignet, grundlegende Fähigkeiten wie Problemlösung, kritisches Denken und logisches Denken zu entwickeln.

Im Kontext des mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Aufgabenfeldes sollen die Schülerinnen und Schüler technische, natürliche, soziale und kulturelle Erscheinungen und Vorgänge mithilfe der Mathematik wahrnehmen, verstehen, beurteilen und beeinflussen. Der Unterricht soll Schülerinnen und Schüler bei der verständnisorientierten Auseinandersetzung mit Mathematik unterstützen und ihr Interesse an mathematikhaltigen Fragestellungen wecken. Dabei werden eine breite Palette unterschiedlichster Unterrichtsformen genutzt, die individuelle Förderung und die Aneignung von Kalkülen und Verfahren einschließen. Mathematik wird als historisch gewachsene Kulturleistung und intellektuelle Herausforderung erlebt und mathematische Kompetenzen als Grundlage zur Selbstentfaltung und aktiven gesellschaftlichen Teilhabe vermittelt. Die inhaltliche und methodische Gestaltung des Unterrichts sind entscheidend dafür, dass Schülerinnen und Schüler eine solche mathematische Hintergrundbildung erwerben können.

Schulinterner Lehrplan für die gymnasiale Oberstufe – Einführungsphase

Unterrichtsvorhaben	Thema
I	Funktionen
II	Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate
III	Untersuchungen von Funktionen
IV	Punkte und Vektoren im Raum
V	Vektoren und Geraden – Bewegung im Raum

Übersicht über die Unterrichtsvorhaben

Einführungsphase

Unterrichtsvorhaben I: *Funktionen*
(**Zeitbedarf**: ca. 25 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationale Funktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Transformationen: Spiegelungen an den Koordinatenachsen, Verschiebungen, Streckungen

Kompetenzerwartungen: Funktionen und Analysis (A)
(1) bestimmen die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten und von ganzrationalen Funktionen,
(2) lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne Hilfsmittel.
(3) erkunden und systematisieren den Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf die Eigenschaften der Funktion (quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Sinusfunktion),
(4) wenden Transformationen bezüglich beider Achsen auf Funktionen (ganzrationale Funktionen, Sinusfunktion) an und deuten die zugehörigen Parameter.

Prozessbezogene Kompetenzen:
Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,

Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,

Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,
Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,

Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte, auch mithilfe KI gestützter generativer Systeme,
Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter,
Kom-(14) vergleichen und beurteilen unter mathematischen Gesichtspunkten Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien sowie von KI gestützten generativen Systemen,

Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells.

Umsetzung:

Die Potenzfunktionen mit ganzrationalen Exponenten werden mithilfe des MMS untersucht und systematisiert (Verlauf, Symmetrie, besondere Punkte, Definitions- und Wertebereich, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$). Dabei spielen Darstellungswechsel eine besondere Rolle. Unter Berücksichtigung von bekannten und neu eingeführten Fachbegriffen und logischen Strukturen werden Zusammenhänge erkundet und systematisiert. Die Herausforderungen der Bildungs- und Fachsprache lassen sich sprachsensibel weiterentwickeln.

Ausgehend von den Potenzfunktionen werden die ganzrationalen Funktionen definiert und mit Blick auf die Eigenschaften untersucht. Im Rahmen der Nullstellenberechnung werden algebraische Rechentechniken der SI ohne Hilfsmittel wiederholt und erweitert. Verschiedene Wege zur Berechnung der Nullstellen werden verglichen und beurteilt, dabei auftretende Fehler werden analysiert. Auch die Vorteile einer Darstellung mithilfe von Linearfaktoren und die Bedeutung der Vielfachheit einer Nullstelle werden hier thematisiert.

Der Einstieg in das Thema Einfluss von Parametern und Transformationen mithilfe des MMS kann mit einem anwendungsbezogenen Kontext (z.B. „Temperaturmittelwerte im Jahresverlauf“ oder „Sonnenscheindauer“) erfolgen.

Ein besonderes Augenmerk muss in diesem Unterrichtsvorhaben auf die Einführung und Wiederholung der elementaren Bedienkompetenzen des MMS gerichtet werden, wobei der Fokus auf der Darstellung von Graphen inklusive Einstellungen sowie auf der Erstellung von Wertetabellen liegt. Ebenfalls wird das MMS in diesem Unterrichtsvorhaben zunehmend für algebraische Operationen verwendet.
Zur Einführung des MMS nutzen Schüler:innen eine KI. Als Vorbereitung dazu dient ein Satz vorbereiteter Arbeitsblätter, anhand derer Inhalte der Sek I mithilfe von GeoGebra unter Nutzung eines entsprechenden Lernszenarios wiederholt werden. [1]

[1] Das entsprechende Material liegt auf IServ im Ordner Fako_Mathematik/KI in der Sek II.

Unterrichtsvorhaben II: *Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate*
(**Zeitbedarf**: ca. 20 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Grundverständnis des Ableitungsbegriffs: mittlere und lokale Änderungsrate, graphisches Ableiten, Sekante und Tangente
- Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte

Kompetenzerwartungen: Funktionen und Analysis (A)
(5) berechnen mittlere und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Sachkontext,
(6) erläutern den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und zurückgelegter Strecke anhand entsprechender Funktionsgraphen,
(7) erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate und nutzen die Schreibweise $\lim\limits_{x \to \ldots} f(x)$,
(8) deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie als Steigung der Tangente an den Graphen,
(9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,
(10) beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion),
(11) leiten Funktionen graphisch ab und entwickeln umgekehrt zum Graphen der Ableitungsfunktion einen passenden Funktionsgraphen,
(13) nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten,
(14) wenden die Summen- und Faktorregel an und beweisen eine dieser Ableitungsregeln.

Prozessbezogene Kompetenzen:
Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit
Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,

Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:

In verschiedenen Anwendungskontexten (z.B.: Bewegungen, Zu- und Abflüsse, Höhenprofil, …) werden durchschnittliche Änderungsraten, durchschnittliche Steigungen und anknüpfend daran Sekanten betrachtet, berechnet und im Kontext interpretiert. Dabei werden quadratische Funktionen als Weg-Zeit-Funktion bei Fall- und Wurf- und anderen gleichförmig beschleunigten Bewegungen gedeutet. Neben zeitabhängigen Vorgängen soll auch eine (geometrische) Steigung im Sachzusammenhang als Kontext betrachtet werden.

Im Zusammenhang mit dem graphischen Ableiten und dem Begründen der Eigenschaften eines Funktionsgraphen sollen die Schülerinnen und Schüler in besonderer Weise zum Vermuten, Begründen und Präzisieren ihrer Aussagen angehalten werden.

Für geeignete einfache Funktionen werden der Grenzübergang bei der „h-Methode“ unter Verwendung der Limesschreibweise exemplarisch durchgeführt und erste Ableitungsfunktionen berechnet.

Bei innermathematischen und anwendungsbezogenen Aufgaben vertiefen die Schülerinnen und Schüler abschließend ihre erworbenen Kompetenzen und berechnen Gleichungen von Sekanten, Tangenten und Normalen sowie Steigungswinkel.

Die grafische Ansicht des MMS kann genutzt werden zur Visualisierung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate und zur Lösungskontrolle bei der Berechnung von Tangentengleichungen.

Unterrichtsvorhaben III: *Untersuchung von Funktionen*
(**Zeitbedarf**: ca. 20 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte

Kompetenzerwartungen: Funktionen und Analysis (A)
(5) berechnen mittlere und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Sachkontext,
(9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,
(12) beschreiben das Monotonieverhalten einer Funktion mithilfe der Ableitung,
(13) nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten,
(14) wenden die Summen- und Faktorregel an und beweisen eine dieser Ableitungsregeln,
(15) unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich,
(16) verwenden das notwendige Kriterium und hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- bzw. Wendepunkten,
(17) beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mithilfe der 2. Ableitung,
(18) nutzen an den unterschiedlichen Darstellungsformen einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente, um Lösungswege effizient zu gestalten,
(19) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen.

Prozessbezogene Kompetenzen:
Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,

Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,

Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,
Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik und stellen charakteristisch sind, begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
Arg-(10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,
Arg-(11) ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,
Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,
Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,
Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung,
Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität.

Umsetzung:
Durch gleichzeitiges Visualisieren einer Ausgangsfunktion 3. Grades und der Ableitungsfunktion ergibt sich die Notwendigkeit der Summen- und Faktorregel für Ableitungen, von denen mindestens eine bewiesen wird. Gleichzeitig entdecken die Lernenden die Zusammenhänge zwischen charakteristischen Punkten der Ausgangsfunktion und der Ableitung, woran im Folgenden angeknüpft wird.

Für ganzrationale Funktionen werden die Zusammenhänge zwischen den Extrempunkten der Ausgangsfunktion und ihrer Ableitung durch die Betrachtung von Monotonieintervallen und der vier möglichen Fälle bezogen auf das Vorzeichen an den Nullstellen der Ableitung untersucht. Die Schülerinnen und Schüler üben damit, vorstellungsbezogen mithilfe von notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu argumentieren. Neben den Fällen, in denen das Vorzeichenwechselkriterium angewendet wird, werden die Lernenden auch mit Situationen konfrontiert, in denen sie mit den Eigenschaften des Graphen oder Terms (Globalverhalten, Symmetrie) argumentieren. Dieses führt auch zur Unterscheidung von lokalen und globalen Extremstellen.
Ausgehend von grafischen Darstellungen schließen sich Untersuchungen zum Krümmungsverhalten und damit die Betrachtung von Wendestellen an. Höhere Ableitungen werden auch im Rahmen von hinreichenden Bedingungen zur Bestimmung von Extrem- und Wendestellen genutzt. Beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen werden die erworbenen Kompetenzen vernetzt und vertieft.

Unterrichtsvorhaben IV: *Punkte und Vektoren im Raum*
(**Zeitbedarf**: ca. 15 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Koordinatisierungen des Raumes: Punkte, Ortsvektoren, Vektoren
- Vektoroperationen: Addition, Multiplikation mit einem Skalar

- Eigenschaften von Vektoren: Länge, Kollinearität

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(1) wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum,
(2) stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar,
(3) deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen und in bestimmten Sachkontexten als Geschwindigkeit,
(4) berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mithilfe des Satzes des Pythagoras,
(5) addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität,
(6) weisen Eigenschaften geometrischer Figuren mithilfe von Vektoren nach.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,
Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:

Ausgangspunkt ist eine Vergewisserung (z.B. in Form einer Mindmap) hinsichtlich der den Schülerinnen und Schülern bereits bekannten Koordinatisierungen (kartesische Koordinaten, geographische Koordinaten, GPS, Robotersteuerung). Das aus der Sek I bekannte Koordinatensystem wird anhand geeigneter Situation um eine dritte Achse erweitert.

Parallel zur Entwicklung einer angemessenen Raumvorstellung wird auch an der Entwicklung einer adäquaten Symbolsprache gearbeitet. Die Informationen dazu (Darstellung mit Ortsvektoren und Verschiebungsvektoren) kommen von der Lehrkraft und werden von den Schülerinnen und Schülern im Rahmen von Aufgaben angewendet. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend geübt werden.

Verkettungen von Verschiebungen führen graphisch und algebraisch zur Vektoraddition und Multiplikation mit einem Skalar.

Mithilfe von Vektoren werden Punkte und Strecken (z.B. Mittelpunkte, Schnittpunkte, Diagonalen, Kanten) geometrischer Figuren in unterschiedlichen Darstellungsformen ermittelt und Eigenschaften geometrischer Figuren (Viereckstypen) und besonderer Punkte (z.B. Teilungsverhältnis) nachgewiesen. Dabei wird auch der Begriff Kollinearität eingeführt und verwendet. Die Länge einer Strecke wird mithilfe des Satzes des Pythagoras bestimmt.

Unterrichtsvorhaben V: *Vektoren und Geraden – Bewegungen im Raum*
(**Zeitbedarf**: ca. 20 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Vektoroperationen: Addition, Multiplikation mit einem Skalar
- Eigenschaften von Vektoren: Länge, Kollinearität
- Geraden und Strecken: Parameterform
- Lagebeziehungen von Geraden: identisch, parallel, windschief, sich schneidend
- Schnittpunkte: Geraden

Kompetenzerwartungen: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)
(3) deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen und in bestimmten Sachkontexten als Geschwindigkeit,
(6) weisen Eigenschaften geometrischer Figuren mithilfe von Vektoren nach,
(7) stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
(8) interpretieren Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext,
(9) untersuchen Lagebeziehungen von Geraden,
(10) untersuchen geometrische Situationen im Raum mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge,
(11) nutzen Eigenschaften von Vektoren und Parametergleichungen von Geraden beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen,
(12) lösen lineare Gleichungssysteme im Zusammenhang von Lagebeziehungen von Geraden und interpretieren die jeweilige Lösungsmenge.

Prozessbezogene Kompetenzen:
Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter,

Kom-(12)	nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Umsetzung:
Lineare Bewegungen werden z.B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen und diskutiert werden.

Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (z. B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden. Auch die Parametrisierung einer Strecke wird in diesem Rahmen thematisiert.

Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben sowie Berechnungen sollen auch ohne Hilfsmittel durchgeführt werden.

Im Anwendungskontext (z.B. Kondensstreifen von Flugzeugen) werden Lagebeziehungen von Geraden untersucht und systematisiert. Die Untersuchung von Schnittpunkten zweier durch Geraden modellierter Flugbahnen führt dabei auf ein lineares 3x2-Gleichungssystem. Einfache lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen werden als Wiederholung aus der Sekundarstufe I ohne Hilfsmittel gelöst, für komplexere LGS wird das MMS verwendet. Ein algorithmisches Lösungsverfahren (z.B. der Gaußalgorithmus) wird später in der Qualifikationsphase eingeführt und geübt.

Summe Einführungsphase: 120 Stunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 100 Stunden

Schulinterner Lehrplan für die gymnasiale Oberstufe – Qualifikationsphase

Unterrichtsvorhaben	Grundkurs
I	Optimierungsprobleme
II	Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen
III	Exponentialfunktionen
IV	Von der Änderungsrate zum Bestand
V	Von der Randfunktion zur Integralfunktion
VI	Modellieren mit Exponentialfunktionen
VII	Beschreibung von Bewegungen durch Geraden und Untersuchung von Lagebeziehungen
VIII	Ebenen als Lösungsmengen linearer Gleichungen (Untersuchung geometrischer Objekte)
IX	Räume vermessen – mit dem Skalarprodukt Polygone und Polyeder untersuchen
X	Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen
XI	Bernoulli-Experimente und Binomialverteilungen
XII	Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen
XIII	Von Übergängen und Prozessen

Unterrichtsvorhaben I – GK (**Zeitbedarf: 9)**

Thema: Optimierungsprobleme

Zentrale Kompetenzen:

- Modellieren
- Problemlösen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A) **/ Inhaltlicher Schwerpunkt:** Funktionen als mathematische Modelle

Thema: Optimierungsprobleme				
Zu entwickelnde Kompetenzen			**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**			
Die SuS... … führen Extremal-probleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese, … verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien […] zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten.	**Modellieren** Die SuS... … treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor, … übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle, … erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen	**Problemlösen** Die SuS... … finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation, …wählen heuristische Hilfsmittel (z.B. Skizze, informative Figur, Tabelle …) aus, um die Situation zu erfassen … nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z.B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel,	GTR	Insbesondere im Bereich der Optimierungsaufgaben werden Problemlösestrategien sowie der Modellierungsprozess gefördert. Zum einen sollen Probleme mit quadratischen Zielfunktionen behandelt werden. Hier bietet es sich an, Lösungsverfahren auch ohne digitale Hilfsmittel einzuüben. An weiteren Problemen entdecken die Schülerinnen und Schüler, dass es notwendig ist, Randextrema zu betrachten (z.B. „Glasscheibe“). Auch Verpackungsprobleme (Dose oder Milchtüte) werden untersucht. Als Vertiefung hierzu lässt sich das Problem des „perfekten Sektglases“ bearbeiten. Gerade bei den Verpackungsproblemen darf auch der Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik nicht zu kurz kommen. Des Weiteren sollte an mindestens einem Beispiel eine Optimierungsaufgabe aus

	Modells, ... beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation, ...beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung.	Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Verallgemeinern ...), ...setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein, ... berücksichtigen einschränkende Bedingungen, ... führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus, ... vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten.		dem Bereich der Wirtschaft (Kostenoptimierung) untersucht werden. Einblick in Problemstellungen wirtschaftswissenschaftlicher Berufe Stellen extremaler Steigung eines Funktionsgraphen werden im Rahmen geeigneter Kontexte (z.B. Neuverschuldung und Schulden oder Besucherströme in einen Freizeitpark/zu einer Messe und erforderlicher Personaleinsatz) thematisiert und dabei der zweiten Ableitung eine anschauliche Bedeutung als Zu- und Abnahmerate der Änderungsrate der Funktion verliehen. Hier soll dann auch die extremale Steigung bestimmt werden.

Unterrichtsvorhaben II – GK (**Zeitbedarf: 15)**

Thema: Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen

Zentrale Kompetenzen: Modellieren / Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Funktionen als mathematische Modelle / Lineare Gleichungssysteme

Thema: Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen				
Zu entwickelnde Kompetenzen			**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**			
Die SuS...	**Modellieren**	**Werkzeuge nutzen**	GTR	Anknüpfend an die Einführungsphase werden an einem Beispiel in einem geeigneten

... bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“), ... beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung, ... verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten, ... beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme ... wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind.	Die SuS... ... erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, ... treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor, ... übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle, ... beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung, ... verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung, ... reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen, ... erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells, ... beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation.	Die SuS... ... verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, ... zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen, ... nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden, Berechnen und Darstellen, ... setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein, ...berücksichtigen einschränkende Bedingungen, ... führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus, ... vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschiede und Gemeinsamkeiten.		Kontext (z.B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) die Parameter der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion angepasst. Anschließend werden aus gegebenen Punkten Gleichungssysteme für die Parameter der Normalform aufgestellt. Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung“ des Graphen und zur Betrachtung von Wendepunkten. Als Kontext hierzu können Trassierungsprobleme gewählt werden. Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Schülerinnen und Schülern kritisch bewertet. Anschließend wird die Modellierung auf ganzrationale Funktionen 3. oder 4. Grades erweitert, um über gegebene Punkte, Symmetrieüberlegungen und Bedingungen an die Ableitung Gleichungen zur Bestimmung der Parameter aufzustellen. Die Lernenden sollen in der Lage sein, LGS mit drei Unbekannten per Hand zu lösen.

Unterrichtsvorhaben III – GK (**Zeitbedarf: 9**)

Thema: Exponentialfunktionen

Zentrale Kompetenzen: Problemlösen / Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A) **/ Inhaltlicher Schwerpunkt:** Fortführung der Differentialrechnung

Thema:				
Zu entwickelnde Kompetenzen			**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**			
Die SuS... … beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen und die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion, ... untersuchen Wachstums- und Zerfallsvorgänge mithilfe funktionaler Ansätze, ... interpretieren Parameter von Funktionen im Anwendungszusammenhang, ... bilden die Ableitungen von natürliche Exponentialfunktion	**Problemlösen** Die SuS... ... erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme, ... entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, ... nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme), ... führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus, ... variieren Fragestellungen auf	**Werkzeuge nutzen** Die SuS... … Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen und grafischen Messen von Steigungen, ... entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt, ... nutzen digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen.	GeoGebra, GTR	Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens sollte eine Auffrischung der bereits in der Einführungsphase erworbenen Kompetenzen durch eine arbeitsteilige Untersuchung verschiedener Kontexte erfolgen. Im Anschluss werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. GeoGebra unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. In einem Tabellenkalkulationsblatt wird für immer kleinere h das Verhalten des Differenzenquotienten beobachtet. Umgekehrt suchen die Schülerinnen und Schüler zu einem gegebenen Ableitungswert die zugehörige Stelle. Dazu könnten sie eine Wertetabelle des Differenzenquotienten aufstellen, die sie immer weiter verfeinern oder aber mit GeoGebra experimentieren,

	dem Hintergrund einer Lösung, ... beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung, ... verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung, ... reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen, ... erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells, ... beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation.			indem sie Tangenten an verschiedenen Stellen an die Funktion legen. Abschließend wird noch die Basis variiert. Dabei ergibt sich quasi automatisch die Frage, für welche Basis Funktion und Ableitungsfunktion übereinstimmen.

Unterrichtsvorhaben IV – GK (**Zeitbedarf: 9 Std.)**

Thema: Von der Änderungsrate zum Bestand

Zentrale Kompetenzen: Kommunizieren

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A) **/ Inhaltlicher Schwerpunkt:** Grundverständnis des Integralbegriffs

Thema: Von der Änderungsrate zum Bestand			
Zu entwickelnde Kompetenzen		**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**		
Die SuS... … interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe, … deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext, ... skizzieren zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion.	**Kommunizieren** Die SuS... ... erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus […] mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen, ... formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege, ... wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus, ... wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen, ... dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar, ... erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie.	GTR	Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten. Deshalb sollten hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen werden (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Der Einstieg kann über eine arbeitsteilige Gruppenarbeit o.ä. erfolgen, in der sich die Schüler*innen selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Außer der Schachtelung durch Ober- und Untersummen sollen die Schüler*innen weitere unterschiedliche Strategien zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert. Qualitativ können die Schüler*innen so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Falls die Lernenden entdecken, welche Auswirkungen dieser Umkehrprozess auf die Funktionsgleichung der „Bilanzfunktion“ hat, kann dies zur Überleitung in das folgende Unterrichtsvorhaben genutzt werden. Die Ergebnisse einer Gruppenarbeit können auf Plakaten festgehalten und in einem Museumsgang präsentiert werden. Schülervorträge über bestimmte Kontexte sind hier möglich.

Unterrichtsvorhaben V - GK

Thema: Von der Randfunktion zur Integralfunktion

Zentrale Kompetenzen: Argumentieren / Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A) **/ Inhaltlicher Schwerpunkt:** Integralrechnung

Thema: Von der Randfunktion zur Integralfunktion				
Zu entwickelnde Kompetenzen			**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**			
Die SuS... … erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs, … erläutern geometrisch-anschaulich den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung), … nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen, … bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen, … bestimmen Integrale mithilfe	**Argumentieren** Die SuS... ... stellen Vermutungen auf, ... unterstützen Vermutungen beispielgebunden, ... präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur, ... stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her.	**Werkzeuge nutzen** Die SuS... … nutzen digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen, … Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum: - Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse - Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrals.	GTR	Schülerinnen und Schüler sollen hier (wieder-) entdecken, dass die Bestandsfunktion eine Stammfunktion der Änderungsrate ist. Dazu kann das im vorhergehenden Unterrichtsvorhaben entwickelte numerische Näherungsverfahren auf den Fall angewendet werden, dass für die Änderungsrate ein Funktionsterm gegeben ist. Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen. Da der Rekonstruktionsprozess auch bei einer abstrakt gegebenen Randfunktion möglich ist, wird für Bestandsfunktionen der Fachbegriff Integralfunktion eingeführt und der Zusammenhang zwischen Rand- und Integralfunktion im Hauptsatz formuliert. Die Regeln zur Bildung von Stammfunktionen können von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbstständig erarbeitet werden. In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Gesamtbeständen zur Verfügung. Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch

von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge, … ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate, … bestimmen Flächeninhalte mit Hilfe von bestimmten Integralen.				Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden. Bei der Berechnung der Flächeninhalte zwischen Graphen werden die Schnittstellen in der Regel numerisch mit dem GTR bestimmt. Komplexere Übungsaufgaben sollten am Ende des Unterrichtsvorhabens bearbeitet werden.

<u>Unterrichtsvorhaben VI - GK-Q1</u> (**Zeitbedarf: 15)**

Thema: Modellieren mit Exponentialfunktionen

Zentrale Kompetenzen: Modellieren

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Fortführung der Differentialrechnung / Integralrechnung

Thema: Modellieren mit Exponentialfunktionen				
Zu entwickelnde Kompetenzen			**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**			
Die SuS... ... untersuchen Wachstums- und Zerfallsvorgänge mithilfe funktionaler Ansätze,	**Modellieren** Die SuS... ... erfassen und strukturieren zunehmend komplexe	**Werkzeuge nutzen** Die SuS... ... verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum	GTR	Im Zusammenhang mit der Modellierung von Wachstumsprozessen durch natürliche Exponentialfunktionen mit linearen Exponenten wird die Kettenregel eingeführt, um auch hilfsmittelfrei Ableitungen für die

... interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext, ... bilden die Ableitungen weiterer Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ... bilden in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung), ... wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an, ... wenden die Produktregel auf Verknüpfungen von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen an, ... bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge, ... ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate.	Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, ... übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle, ... erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells, ... führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus, ... erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells, ... ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu, ... beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation, ... beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung, ... verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die	zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen und grafischen Messen von Steigungen, ... entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt, ... nutzen digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen.		entsprechenden Funktionsterme bilden zu können. An einem Beispiel sollte auch ein beschränktes Wachstum untersucht werden. An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen erarbeitet. In diesem Zusammenhang wird die Produktregel zum Ableiten eingeführt. In diesen Kontexten ergeben sich ebenfalls Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird. Parameter werden nur in konkreten Kontexten und nur exemplarisch variiert (keine systematische Untersuchung von Funktionenscharen). Hier kann der GTR als Hilfsmittel gut genutzt werden. Dabei werden z.B. zahlenmäßige Änderungen des Funktionsterms bezüglich ihrer Auswirkung untersucht und im Hinblick auf den Kontext interpretiert.

	Fragestellung, ... reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen.			

<u>Unterrichtsvorhaben VII - GK:</u>

Thema: Beschreibung von Bewegungen durch Geraden und Untersuchung von Lagebeziehungen

Zentrale Kompetenzen: Modellieren / Argumentieren / Kommunizieren

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Darstellung und Untersuchung geometrische Objekte (Geraden)

Thema: Beschreibung von Bewegungen durch Geraden und Untersuchung von Lagebeziehungen				
Zu entwickelnde Kompetenzen			**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**			
Die SuS… … stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar, … interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext, … stellen Strecken in Parameterform dar, … interpretieren die	**Modellieren** Die SuS… … erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren),* … treffen Annahmen und nehmen begründet	**Argumentieren** Die SuS… … präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten),* … stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober- / Unterbegriff) *(Begründen),* … nutzen mathematische Regeln		Lineare Bewegungen werden z. B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und dynamisch mit DGS dargestellt. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen werden. Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge

Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen, … untersuchen Lagebeziehungen zwischen Geraden, … berechnen Schnittpunkte von Geraden und deuten sie im Sachkontext.	Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren),* … übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren),* … erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des Modells *(Mathematisieren),* … beurteilen die Angemessenheit aufgestellter Modelle für die Fragestellung *(Validieren),* … verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren),* **Werkzeuge nutzen** Die SuS… … nutzen Geodreiecke, geometrische Modelle und Dynamische-Geometrie-Software, … verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum:	bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen),* … berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen / Äquivalenz, Und- / Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) *(Begründen),* … überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen),* **Kommunizieren** Die SuS… … erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen *(Rezipieren),* … verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang *(Produzieren),* … wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren),* … erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren),* … vergleichen und beurteilen		(z. B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden. Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen sollen auch hilfsmittelfrei durchgeführt werden. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend geübt werden. Auf dieser Grundlage können z. B. Schattenwürfe von Gebäuden in Parallel- und Zentralprojektion auf eine der Grundebenen berechnet und zeichnerisch dargestellt werden. Der Einsatz der DGS bietet hier die zusätzliche Möglichkeit, dass der Ort der Strahlenquelle variiert werden kann Der Fokus der Untersuchung von Lagebeziehungen liegt auf dem logischen Aspekt einer vollständigen Klassifizierung sowie einer präzisen Begriffsbildung (z. B. Trennung der Begriffe „parallel“, „echt parallel“, „identisch“). Flussdiagramme und Tabellen sind ein geeignetes Mittel, solche Algorithmen darzustellen. Es werden möglichst selbstständig solche Darstellungen entwickelt, die auf Lernplakaten dokumentiert, präsentiert, verglichen und hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit beurteilt werden können. In

	- grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden - Darstellen von Objekten im Raum	ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität *(Diskutieren).*		diesem Teil des Unterrichtsvorhabens sollen nicht nur logische Strukturen reflektiert, sondern auch Unterrichtsformen gewählt werden, bei denen Kommunikationsprozesse im Team unter Verwendung der Fachsprache angeregt werden. Als Kontext kann dazu die Modellierung von Flugbahnen (Kondensstreifen) wieder aufgegriffen werden. Dabei wird evtl. die Frage des Abstandes zwischen Flugobjekten relevant. Bei genügend zur Verfügung stehender Zeit oder binnendifferenziert könnte (über den Kernlehrplan hinausgehend) das Abstandsminimum numerisch, grafisch oder algebraisch mit den Verfahren der Analysis ermittelt werden.

<u>Unterrichtsvorhaben VIII - GK:</u> (**Zeitbedarf:** 19 Std.)

Thema: Ebenen als Lösungsmengen linearer Gleichungen (Untersuchung geometrischer Objekte)

Zentrale Kompetenzen: Argumentieren / Kommunizieren / Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Darstellung und Untersuchung geometrische Objekte / Lineare Gleichungssysteme

Thema: Ebenen als Lösungsmengen linearer Gleichungen (Untersuchung geometrischer Objekte)		
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**

Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**			
Die SuS… … stellen lineare Gleichungs-systeme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar, … beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme, … wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind, … interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen, … stellen Ebenen in Parameterform dar, … untersuchen Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen, … berechnen Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext.	**Problemlösen** Die SuS… … wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen (Erkunden), … entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen),* … nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Verallgemeinern) *(Lösen),* … führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen),* … vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschiede und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren),* … beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren),*	**Werkzeuge nutzen** Die SuS… … nutzen digitale Werkzeuge (GTR) zum Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen		Als Einstiegskontext für die Parametrisierung einer Ebene kann eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten dienen. Diese bildet ein schiefwinkliges Koordinatensystem in der Ebene. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus der Einführungsphase wieder aufgegriffen. Wenn genügend Zeit zur Verfügung steht, können durch Einschränkung des Definitionsbereichs Parallelogramme und Dreiecke beschrieben und auch anspruchsvollere Modellierungsaufgaben gestellt werden, die über die Kompetenzerwartungen des KLP hinausgehen. In diesem Unterrichtsvorhaben werden Problemlösekompetenzen erworben, indem sich heuristische Strategien bewusst gemacht werden (eine planerische Skizze anfertigen, die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt beschreiben, geometrische Hilfsobjekte einführen, bekannte Verfahren zielgerichtet einsetzen und in komplexeren Abläufen kombinieren und unterschiedliche Lösungswege vergleichen). Punktproben sowie die Berechnung von Spurgeraden in den Grundebenen und von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen führen zunächst noch zu einfachen Gleichungssystemen. Die Achsenabschnitte erlauben eine Darstellung in einem räumlichen Koordinatensystem.

	… analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern *(Reflektieren).*			Die Untersuchung von Schattenwürfen eines Mastes auf eine Dachfläche z.B. motiviert eine Fortführung der systematischen Auseinandersetzung mit linearen Gleichungssystemen, mit der Matrix-Vektor-Schreibweise und mit dem Gauß-Verfahren. Die Lösungsmengen werden mit dem GTR bestimmt, zentrale Werkzeugkompetenz in diesem Unterrichtsvorhaben ist die Interpretation des angezeigten Lösungsvektors bzw. der reduzierten Matrix. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung (Lagebeziehung) und der algebraischen Formalisierung sollte stets deutlich werden.

<u>Unterrichtsvorhaben IX - GK:</u>

Thema: Räume vermessen – mit dem Skalarprodukt Polygone und Polyeder untersuchen

Zentrale Kompetenzen: Problemlösen

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Darstellung und Untersuchung geometrische Objekte / Skalarprodukt

Thema: Räume vermessen – mit dem Skalarprodukt Polygone und Polyeder untersuchen		
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**

Inhaltsbezogene Kompetenzen:	Prozessbezogene Kompetenzen:		
Die SuS… … deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es, … untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung).	**Problemlösen** Die SuS… … erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme (*Erkunden),* … analysieren und strukturiere die Problemsituation (*Erkunden),* … entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen).*		Das Skalarprodukt wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Durch eine Zerlegung in parallele und orthogonale Komponenten wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dies wird zur Einführung des Winkels über den Kosinus genutzt (alternativ zu einer Herleitung aus dem Kosinussatz). Bei hinreichend zur Verfügung stehender Zeit kann in Anwendungskontexten (z.B. Vorbeiflug eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes, entdeckt werden, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. als Streckenlänge über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Bei dieser Problemstellung sollten unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen werden. Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für (im Sinne des Problemlösens offen angelegte) exemplarische geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte (z.B. Gebäude) bezogen werden. Dabei kann z. B. der Nachweis von Dreiecks- bzw. Viereckstypen wieder aufgenommen werden.

<u>Unterrichtsvorhaben X - GK</u>

Thema: Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen

Zentrale Kompetenzen: Modellieren

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Thema: Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen			
Zu entwickelnde Kompetenzen		**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**		
Die SuS... … untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben, … erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen, … bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen	**Modellieren** Die SuS... ... treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor, ... erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells, ... beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation.		Anhand verschiedener Glücksspiele wird zunächst der Begriff der Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung des Mittelwertes bei empirischen Häufigkeitsverteilungen wird der Erwartungswert einer Zufallsgröße definiert. Das Grundverständnis von Streumaßen wird durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots in der Sekundarstufe I reaktiviert. Über eingängige Beispiele von Verteilungen mit gleichem Mittelwert aber unterschiedlicher Streuung wird die Definition der Standardabweichung als mittlere quadratische Abweichung im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen motiviert; anhand gezielter Veränderungen der Verteilung werden die Auswirkungen auf deren Kenngrößen untersucht und interpretiert. Anschließend werden diese Größen zum Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und zu einfachen Risikoabschätzungen genutzt.

Unterrichtsvorhaben XI - GK

Thema: Bernoulli-Experimente und Binomialverteilungen

Zentrale Kompetenzen: Modellieren / Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Binomialverteilung

Thema: Bernoulli-Experimente und Binomialverteilungen				
Zu entwickelnde Kompetenzen			**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**			
Die SuS... … verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufalls-experimente, … erklären die Binomialverteilung im Kontext und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten, … beschreiben den Einfluss der Parameter *n* und *p* auf Binomialverteilungen und ihre graphische	Die SuS... ...treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor, ...erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells, ...beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation.	**Werkzeuge nutzen** Die SuS... … nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen, … verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum - Generieren von Zufallszahlen, - Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufalls-größen, - Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen, - Variieren der Parameter von		Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Durch Vergleich mit dem „Ziehen ohne Zurücklegen“ wird geklärt, dass die Anwendung des Modells ‚Bernoullikette’ eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d.h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation und die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an. Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang *n* und Trefferwahrscheinlichkeit *p* erfolgt dabei durch die

Darstellung … bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen		Binomialverteilungen, - Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (Erwartungswert, Standardabweichung)		graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR. Während sich die Berechnung des Erwartungswertes erschließt, kann die Formel für die Standardabweichung für ein zweistufiges Bernoulliexperiment plausibel gemacht werden. Auf eine allgemeingültige Herleitung wird verzichtet. Durch Erkunden wird festgestellt, dass unabhängig von *n* und *p* ca. 68% der Ergebnisse in der 1σ-Umgebung des Erwartungswertes liegen.

Unterrichtsvorhaben XII - GK

Thema: Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen

Zentrale Kompetenzen: Modellieren / Argumentieren

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Binomialverteilung

Thema: Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen				
Zu entwickelnde Kompetenzen			**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**			
Die SuS... … nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen, … schließen anhand einer	**Modellieren** Die SuS... ...treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer	**Argumentieren** Die SuS... … stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her,		In verschiedenen Sachkontexten wird zunächst die Möglichkeit einer Modellierung der Realsituation mithilfe der Binomialverteilung überprüft. Die Grenzen des Modellierungsprozesses werden aufgezeigt und begründet. In diesem Zusammenhang werden geklärt: - die Beschreibung des Sachkontextes durch ein

vorgegebenen Entscheidungsregel aus einem Stichprobenergebnis auf die Grundgesamtheit, … beschreiben den Einfluss der Parameter *n* und *p* auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung, … bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen.	realen Situation vor, …erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells, …beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation, … beurteilen die Angemessenheit aufgestellter Modelle für die Fragestellung, … reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen.	… nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen, …verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten.		Zufallsexperiment - die Interpretation des Zufallsexperiments als Bernoullikette - die Definition der zu betrachtenden Zufallsgröße - die Unabhängigkeit der Ergebnisse - die Benennung von Stichprobenumfang *n* und Trefferwahrscheinlichkeit *p* Dies erfolgt in unterschiedlichsten Realkontexten, deren Bearbeitung auf vielfältigen Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“). Prüfverfahren mit vorgegebenen Entscheidungs-regeln bieten einen besonderen Anlass, um von einer (ein- oder mehrstufigen) Stichproben-entnahme aus einer Lieferung auf nicht bekannte Parameter in der Grundgesamtheit zu schließen. Einblick in Problemstellungen des Versicherungswesens und der Meinungsforschung Wenn genügend Unterrichtszeit zur Verfügung steht, können im Rahmen der beurteilenden Statistik vertiefend (und über den Kernlehrplan hinausgehend) Produzenten- und Abnehmerrisiken bestimmt werden.

<u>Unterrichtsvorhaben XIII - GK</u>

Thema: Von Übergängen und Prozessen

Zentrale Kompetenzen: Modellieren / Argumentieren

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Stochastische Prozesse

Thema: Von Übergängen und Prozessen				
Zu entwickelnde Kompetenzen			**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**			
Die SuS... …beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen, … verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände).	**Modellieren** Die SuS... … erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, … übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle, … erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells, … beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation.	**Argumentieren** Die SuS... … präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur, … nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen, … stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her, ...überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können.		Hinweis: Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Schüler*innen modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann. Der Auftrag an Schüler*innen, einen stochastischen Prozess graphisch darzustellen, führt in der Regel zur Erstellung eines Baumdiagramms, dessen erste Stufe den Ausgangszustand beschreibt. Im Zusammenhang mit der Interpretation der Pfadregeln als Gleichungssystem können sie daraus die Matrix-Vektor-Darstellung des Prozesses entwickeln. Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung). Hier bietet sich eine Vernetzung mit der Linearen Algebra hinsichtlich der Betrachtung linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen an.

Unterrichtsvorhaben	**Leistungskurs**
I	Optimierungsprobleme
II	Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen
III	Exponentialfunktionen
IV	Von der Änderungsrate zum Bestand
V	Von der Randfunktion zur Integralfunktion
VI	Modellieren mit Exponentialfunktionen
VII	Beschreibung von Bewegungen und Schattenwurf mit Geraden
VIII	Die Welt vermessen
IX	Ebenen als Lösungsmengen linearer Gleichungen (Untersuchung geometrischer Objekte)
X	Abstände und Winkel
XI	Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen
XII	Treffer oder nicht? – Bernoulliexperimente und Binomialverteilungen
XIII	Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen
XIV	Ist die Glocke normal?
XV	Signifikant und relevant? – Testen von Hypothesen
XVI	Von Übergängen und Prozessen

Unterrichtsvorhaben I – LK (Zeitbedarf: 20 Std.)

Thema: Optimierungsprobleme

Zentrale Kompetenzen: Modellieren / Problemlösen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Funktionen als mathematische Modelle

<table>
<tr><td colspan="5">Thema: Optimierungsprobleme</td></tr>
<tr><td colspan="3">Zu entwickelnde Kompetenzen</td><td>Medien-einsatz</td><td>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</td></tr>
<tr><td>Inhaltsbezogene Kompetenzen:</td><td colspan="2">Prozessbezogene Kompetenzen:</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Die SuS...

… führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese,

… verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien […] zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten,

… bilden die Ableitungen weiterer Funktionen Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten,</td><td>Modellieren

Die SuS...

...treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor

...übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle

...erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells</td><td>Problemlösen

Die SuS...

...finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation

...wählen heuristische Hilfsmittel (z.B. Skizze, informative Figur, Tabelle …) aus, um die Situation zu erfassen

… nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z.B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme,</td><td></td><td>Insbesondere im Bereich der Optimierungsaufgaben werden Problemlösestrategien sowie der Modellierungsprozess gefördert.
Zum einen sollen Probleme mit quadratischen Zielfunktionen behandelt werden. Hier bietet es sich an, Lösungsverfahren auch ohne digitale Hilfsmittel einzuüben.
An weiteren Problemen entdecken die Schülerinnen und Schüler, dass es notwendig ist, Randextrema zu betrachten (z.B. „Glasscheibe“).
Auch Verpackungsprobleme (Dose oder Milchtüte) werden untersucht. Als Vertiefung hierzu lässt sich das Problem des „perfekten Sektglases“ bearbeiten. Gerade bei den Verpackungsproblemen darf auch der Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik nicht zu kurz kommen.
Des Weiteren sollte an mindestens einem Beispiel eine Optimierungsaufgabe aus dem</td></tr>
</table>

... führen Eigenschaften von zusammengesetzten Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) argumentativ auf deren Bestandteile zurück, ...wenden die Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionen an.	...beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation ...beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung.	Verallgemeinern ...), ...setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein, ...berücksichtigen einschränkende Bedingungen, ...führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus, ...vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschiede und Gemeinsamkeiten.		Bereich der Wirtschaft (Kostenoptimierung) untersucht werden. Steuerprogression als Beispiel nicht stetiger Funktionen: Einblick in Problemstellungen wirtschaftswissenschaftlicher Berufe Im Bereich der Ökonomie und Geometrie entwickeln die Schülerinnen und Schüler die Ableitungen von Wurzelfunktionen sowie die Produkt- und Kettenregel und wenden sie an. Stellen extremaler Steigung eines Funktionsgraphen werden im Rahmen geeigneter Kontexte (z.B. Neuverschuldung und Schulden oder Besucherströme in einen Freizeitpark/zu einer Messe und erforderlicher Personaleinsatz) thematisiert und dabei der zweiten Ableitung eine anschauliche Bedeutung als Zu- und Abnahmerate der Änderungsrate der Funktion verliehen. Hier soll dann auch die extremale Steigung bestimmt werden.

Unterrichtsvorhaben II – LK (Zeitbedarf: ca. 20 Std.)

Thema: Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen

Zentrale Kompetenzen: Modellieren / Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Funktionen als mathematische Modelle / Lineare Gleichungssysteme

Thema: Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen				
Zu entwickelnde Kompetenzen			**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**			
Die SuS... ... interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionenscharen, … bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“), ... beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung, ... verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten, ... beschreiben den Gauß-Algorithmus als	**Modellieren** Die SuS... ... erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, ... treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor, ... übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle ... beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung, ... verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung, ... reflektieren die	**Werkzeuge nutzen** Die SuS... … verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen, ... nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden, Berechnen und Darstellen, ... setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein, ... berücksichtigen einschränkende Bedingungen, ... führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus, ... vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschiede und	GTR	Anknüpfend an die Einführungsphase werden an einem Beispiel in einem geeigneten Kontext (z.B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) die Parameter der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion angepasst. Anschließend werden aus gegebenen Punkten Gleichungssysteme für die Parameter der Normalform aufgestellt. Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung“ des Graphen und zur Betrachtung von Wendepunkten. Als Kontext hierzu können Trassierungsprobleme gewählt werden. Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Schülerinnen und Schülern kritisch bewertet. Anschließend wird die Modellierung auf ganzrationale Funktionen 3. oder 4. Grades erweitert, um über gegebene Punkte, Symmetrieüberlegungen und Bedingungen an

Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme, ... wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind.	Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen, ... erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells, ... beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation.	Gemeinsamkeiten.		die Ableitung Gleichungen zur Bestimmung der Parameter aufzustellen. Die Lernenden sollen in der Lage sein, LGS mit drei Unbekannten per Hand zu lösen. Über freie Parameter aus unterbestimmten Gleichungssystemen werden Lösungsscharen erzeugt und deren Elemente hinsichtlich ihrer Eignung für das Modellierungsproblem untersucht und beurteilt. An innermathematischen Steckbriefen werden Fragen der Eindeutigkeit der Modellierung und der Einfluss von Parametern auf den Funktionsgraphen untersucht.

<u>Unterrichtsvorhaben III – LK:</u> (Zeitbedarf: ca. 20 Std.)

Thema: Exponentialfunktionen

Zentrale Kompetenzen: Problemlösen / Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Fortführung der Differentialrechnung

Thema: Exponentialfunktionen				
Zu entwickelnde Kompetenzen			**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**			
Die SuS... … beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen und begründen die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion, ... verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von Wachstums- und Zerfallvorgängen und vergleichen die Qualität der Modellierung exemplarisch mit einem begrenzten Wachstum, ... interpretieren Parameter von Funktionen im Anwendungszusammenhang und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionenscharen, ... nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der natürlichen	**Problemlösen** Die SuS... ... erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme, ... entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, ... nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z.B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme), ... führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus, ... variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung, ... beurteilen die Angemessenheit aufgestellter	**Werkzeuge nutzen** Die SuS... … Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen und grafischen Messen von Steigungen, ... entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt, ... nutzen digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen.	GeoGebra, GTR	Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens sollte eine Auffrischung der bereits in der Einführungsphase erworbenen Kompetenzen durch eine arbeitsteilige Untersuchung verschiedener Kontexte erfolgen. Im Anschluss werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. GeoGebra unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen. Die Entdeckung der Eulerschen Zahl sollte die Auseinandersetzung mit dem Grenzwertbegriff motivieren. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. In einem Tabellenkalkulationsblatt wird für immer kleinere h das Verhalten des Differenzenquotienten beobachtet. Umgekehrt suchen die Schüler*innen zu einem gegebenen Ableitungswert die zugehörige Stelle. Dazu könnten sie eine Wertetabelle des Differenzenquotienten aufstellen, die sie immer weiter verfeinern oder aber mit GeoGebra experimentieren, indem sie Tangenten an verschiedenen Stellen an die Funktion legen.

Exponentialfunktion, ... bilden die Ableitungen weiterer Funktionen: - natürliche Exponentialfunktion - Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis - natürliche Logarithmusfunktion ... nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion: $f(x) = \frac{1}{x}$.	(ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung, ... verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung, ... reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen, ... erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells, ... beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation.			Abschließend wird noch die Basis variiert. Dabei ergibt sich quasi automatisch die Frage, für welche Basis Funktion und Ableitungsfunktion übereinstimmen.

<u>Unterrichtsvorhaben IV - LK</u>

Thema: Von der Änderungsrate zum Bestand

Zentrale Kompetenzen: Kommunizieren

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Grundverständnis des Integralbegriffs

Thema: Von der Änderungsrate zum Bestand			
Zu entwickelnde Kompetenzen		**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**		
Die SuS... … interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe, … deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext, ... skizzieren zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion.	**Kommunizieren** Die SuS... ... erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus […] mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen, ... formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege, ... wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus, ... wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen, ... dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar, ... erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie.		Der Einstieg im Leistungskurs unterscheidet sich durch etwas komplexere Aufgaben von der Einführung im Grundkurs. Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten. Deshalb sollten hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen werden (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Der Einstieg kann über eine arbeitsteilige Gruppenarbeit o.ä. erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Außer der Schachtelung durch Ober- und Untersummen sollen die Schüler*innen eigenständig weitere unterschiedliche Strategien zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert. Qualitativ können die Schüler*innen so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Falls die Lernenden entdecken, welche Auswirkungen dieser Umkehrprozess auf die Funktionsgleichung der „Bilanzfunktion“ hat,

			kann dies zur Überleitung in das folgende Unterrichtsvorhaben genutzt werden. Die Ergebnisse einer Gruppenarbeit können auf Plakaten festgehalten und in einem Museumsgang präsentiert werden. Schülervorträge über bestimmte Kontexte sind hier möglich.

Unterrichtsvorhaben V - LK

Thema: Von der Randfunktion zur Integralfunktion

Zentrale Kompetenzen: Argumentieren / Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Integralrechnung

Thema: Von der Randfunktion zur Integralfunktion				
Zu entwickelnde Kompetenzen			**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**			
Die SuS... … erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines	**Argumentieren** Die SuS... ... stellen Vermutungen auf, ... unterstützen Vermutungen	**Werkzeuge nutzen** Die SuS... … nutzen digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und		Schülerinnen und Schüler sollen hier selbst entdecken, dass die Integralfunktion J_a eine Stammfunktion der Randfunktion ist. Dazu wird das im vorhergehenden Unterrichtsvorhaben entwickelte numerische Näherungsverfahren zur Rekonstruktion einer Größe aus der Änderungsrate auf eine kontextfrei durch einen

propädeutischen Grenzwertbegriffs, … erläutern den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion, … nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen, … begründen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Verwendung eines anschaulichen Stetigkeitsbegriffs, … bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen, … bestimmen Integrale numerisch, … ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion, … bestimmen Flächeninhalte und Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen, mit Hilfe von bestimmten und uneigentlichen Integralen.	beispielgebunden, ... präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur, ... stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her, ... verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten, … erklären vorgegebene Argumentationen und mathematische Beweise, … überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können.	Darstellen, … Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum - Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse - Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrals.		Term gegebene Funktion angewendet und zur Konstruktion der Integralfunktion genutzt (Verallgemeinerung). Um den Zusammenhang zwischen Integralfunktion und Randfunktion zu begründen, wird der absolute Zuwachs $J_a(x+h) - J_a(x)$ geometrisch durch Rechtecke nach oben und unten abgeschätzt. Der Übergang zur relativen Änderung mit anschließendem Grenzübergang führt dazu, die Stetigkeit von Funktionen zu thematisieren, und motiviert, die Voraussetzungen zu präzisieren und den Hauptsatz formal exakt zu notieren. In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Produktsummen zur Verfügung. Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden. Bei der Berechnung der Volumina wird stark auf Analogien zur Flächenberechnung verwiesen. (Gedanklich wird mit einem „Eierschneider“ der Rotationskörper in berechenbare Zylinder zerlegt, analog den Rechtecken oder Trapezen bei der Flächenberechnung. Auch die jeweiligen Summenformeln weisen Entsprechungen auf.)

Unterrichtsvorhaben VI - LK (Zeitbedarf: 20)

Thema: Modellieren mit Exponentialfunktionen

Zentrale Kompetenzen: Modellieren

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Fortführung der Differentialrechnung / Integralrechnung

Thema: Modellieren mit Exponentialfunktionen				
Zu entwickelnde Kompetenzen			**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**			
Die SuS... ... verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsvorgängen und vergleichen die Qualität der Modellierung exemplarisch mit einem begrenzten Wachstum, ... interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext, ... bilden die Ableitungen von Potenzfunktionen mit	**Modellieren** Die SuS... ... erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, ... übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle, ... erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung	**Werkzeuge nutzen** Die SuS... ... Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen und grafischen Messen von Steigungen, ... entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt,	GTR	Im Zusammenhang mit der Modellierung von Wachstumsprozessen durch natürliche Exponentialfunktionen mit linearen Exponenten wird die Kettenregel eingeführt, um auch hilfsmittelfrei Ableitungen für die entsprechenden Funktionsterme bilden zu können. An einem Beispiel sollte auch ein beschränktes Wachstum untersucht werden. An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen erarbeitet. In

rationalen Exponenten, ... führen Eigenschaften von zusammengesetzten Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) argumentativ auf deren Bestandteile zurück, ...wenden die Produkt- und Kettenregel an, ...bestimmen Integrale numerisch und mithilfe von gegebenen oder Nachschlagewerken entnommenen Stammfunktionen, ...ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion.	innerhalb des mathematischen Modells, ... führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus, ... erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells, ... ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu, ... beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation, ... beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung, ... verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung, ... reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen.	... nutzen digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen.		diesem Zusammenhang wird die Produktregel zum Ableiten eingeführt. In diesen Kontexten ergeben sich ebenfalls Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird. Es sollten Kontexte geschaffen werden, die die Möglichkeit zu komplexen Modellierungen mit Funktionen anderer Funktionsklassen geben; insbesondere unter Berücksichtigung von Parametern, für die Einschränkungen des Definitionsbereiches oder Fallunterscheidungen vorgenommen werden müssen.

Unterrichtsvorhaben VII - LK: (Zeitbedarf: 10 Std.)

Thema: Beschreibung von Bewegungen und Schattenwurf mit Geraden

Zentrale Kompetenzen: Modellieren / Problemlösen

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Darstellung und Untersuchung geometrische Objekte (Geraden)

Thema: Beschreibung von Bewegungen und Schattenwurf mit Geraden				
Zu entwickelnde Kompetenzen			**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**			
Die SuS… … stellen Geraden in Parameterform dar, … interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext, … stellen Strecken in Parameterform dar, … interpretieren die Lösungsmenge von linearen	**Modellieren** Die SuS… … erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren),* … treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren),* … übersetzen zunehmend	**Werkzeuge nutzen** Die SuS… … nutzen Geodreiecke, geometrische Modelle oder Dynamische-Geometrie-Software.	GTR, GeoGebra	Lineare Bewegungen werden z.B. im Kontext von Flugbahnen durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und dynamisch mit DGS dargestellt. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen werden. Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit mittels einer Funktion zu variieren, z.B. zur Beschreibung einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (hier die Flugbahn) und einer

Gleichungssystemen, … untersuchen Lagebeziehungen zwischen Geraden, … berechnen Schnittpunkte von Geraden und deuten sie im Sachkontext.	komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren),* … erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren),* … beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren),* … verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren).*			Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden. Punktproben sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen erlauben die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen. Solche Darstellungen sollten geübt werden. Auf dieser Grundlage können z.B. Schattenwürfe von Gebäuden in Parallel- und Zentralprojektion auf eine der Grundebenen berechnet und zeichnerisch dargestellt werden. Der Einsatz der DGS bietet die zusätzliche Möglichkeit, dass der Ort der Strahlenquelle variiert werden kann. Das Skalarprodukt wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Durch eine Zerlegung in parallele und orthogonale Komponenten wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dies wird zur Einführung des Winkels über den Kosinus genutzt.

<u>Unterrichtsvorhaben VIII - LK:</u> (Zeitbedarf: 10 Std.)

Thema: Die Welt vermessen

Zentrale Kompetenzen: Problemlösen

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Darstellung und Untersuchung geometrische Objekte / Skalarprodukt

Thema: Die Welt vermessen			
Zu entwickelnde Kompetenzen		**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**		
Die SuS… … deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es, … untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung), … bestimmen Abstände zwischen Punkten und Geraden.	**Problemlösen** Die SuS… … erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme (*Erkunden),* … analysieren und strukturiere die Problemsituation (*Erkunden),* … entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen),* … vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschiede und Gemeinsamkeiten *(Reflexion).*	GTR	Das Skalarprodukt wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Durch eine Zerlegung in parallele und orthogonale Komponenten wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dies wird zur Einführung des Winkels über den Kosinus genutzt. Anknüpfend an die EF werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarproduktes untersucht. Dabei bieten sich vorrangig Problemlöseaufgaben (z.B. Nachweis von Viereckstypen) an. In Anwendungskontexten (Vorbeiflug eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes) wird entdeckt, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u.a. über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Eine Vernetzung mit Verfahren der Analysis zur Abstandsberechnung bietet sich an.

Unterrichtsvorhaben IX - LK: (Zeitbedarf: 20 Std.)

Thema: Ebenen als Lösungsmengen linearer Gleichungen (Untersuchung geometrischer Objekte)

Zentrale Kompetenzen: Argumentieren /Kommunizieren / Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Darstellung und Untersuchung geometrische Objekte / Lineare Gleichungssysteme

Thema: Ebenen als Lösungsmengen linearer Gleichungen (Untersuchung geometrischer Objekte)				
Zu entwickelnde Kompetenzen			**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**			
Die SuS… … stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar, … beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungs-verfahren für lineare Gleichungssysteme, … wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Glei-	**Problemlösen** Die SuS… … wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen (Erkunden), … entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen),* … nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B.	**Kommunizieren** Die SuS… … verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang *(Produzieren),* … wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren),* … erstellen Ausarbeitungen und	GTR	Das Gauß-Verfahren bietet der Einsatz des GTR Anlass, z. B. über die Interpretation der trigonalisierten Koeffizientenmatrix die Dimension des Lösungsraumes zu untersuchen. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung und der algebraischen Formalisierung soll stets deutlich werden. Als Einstiegskontext für die Parametrisierung einer Ebene kann eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten dienen. Diese bildet ein schiefwinkliges Koordinatensystem in der Ebene. In diesem Unterrichtsvorhaben werden Problemlösekompetenzen erworben,

chungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind, … interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen, … stellen Ebenen in Parameterform dar, … untersuchen Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen, … berechnen Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext.	Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Verallgemeinern) *(Lösen),* … führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen),* … vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschiede und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren),* … beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren),* … analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern *(Reflektieren),* … variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung *(Reflektieren),*	präsentieren sie *(Produzieren),* … vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität *(Diskutieren).* **Werkzeuge nutzen** Die SuS… … digitale Werkzeuge nutzen (z.B. GTR) zum - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen - evtl. Darstellen von Objekten im Raum.		indem sich heuristische Strategien bewusst gemacht werden (eine planerische Skizze anfertigen, die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt beschreiben, geometrische Hilfsobjekte einführen, bekannte Verfahren zielgerichtet einsetzen und in komplexeren Abläufen kombinieren und unterschiedliche Lösungswege kriteriengestützt vergleichen). Punktproben sowie die Berechnung von Spurgeraden in den Grundebenen und von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen führen zunächst noch zu einfachen Gleichungssystemen. Die Achsenabschnitte erlauben eine Darstellung in einem räumlichen Koordinatensystem. Die Lösungsmengen werden u.a. mit dem GTR bestimmt, zentrale Werkzeugkompetenz in diesem Unterrichtsvorhaben ist die Interpretation des angezeigten Lösungsvektors bzw. der reduzierten Matrix.

Unterrichtsvorhaben X - LK: (Zeitbedarf: 20 Std.)

Thema: Abstände und Winkel

Zentrale Kompetenzen: Problemlösen / Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Lagebeziehungen und Abstände /Lineare Gleichungssysteme

<table>
<tr><td colspan="5">Thema: Abstände und Winkel</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Zu entwickelnde Kompetenzen</td><td>Medien-einsatz</td><td>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</td></tr>
<tr><td>Inhaltsbezogene Kompetenzen:</td><td colspan="2">Prozessbezogene Kompetenzen:</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Die SuS…

… stellen Ebenen in Koordinatenform dar,

… stellen Ebenen in Normalenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum,

… bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen,

… untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel-</td><td>Problemlösen

… wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen (Erkunden),

… entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege (Lösen),
… nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. […] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes,</td><td>Kommunizieren

… verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang (Produzieren),

… dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar (Produzieren),

… wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (Produzieren),

… erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie (Produzieren),

… vergleichen und beurteilen</td><td>GTR</td><td>Als weitere Darstellungsform werden nun die Normalen- und Koordinatenform als Ebenengleichung entwickelt.
Für den Wechsel zwischen der Koordinaten- und Parameterform der Ebene wird ein Normalenvektor bestimmt. Zur Bestimmung des Normalenvektors kann das Vektorprodukt verwendet werden.

Als Weiterentwicklung zur Abstandsberechnung Punkt Gerade wird die Abstandsberechnung zwischen Punkt und Ebene systematisch bearbeitet. Weitere Formen der Abstandsberechnung müssen nicht systematisch abgearbeitet werden. Sie können bei Bedarf im Rahmen von Problemlöseprozessen in konkrete Aufgaben integriert werden.</td></tr>
</table>

und Längenberechnung).	Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, [...]) *(Lösen),* … vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschiede und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren),* … beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren),* … analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern *(Reflektieren).*	ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität *(Diskutieren).* **Werkzeuge nutzen** … nutzen digitale Werkzeuge (GTR) zum - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen - Darstellen von Objekten im Raum		

Unterrichtsvorhaben XI - LK

Thema: Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen

Zentrale Kompetenzen: Modellieren

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Unterrichtsvorhaben XII - LK

Thema: Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen			
Zu entwickelnde Kompetenzen		**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**		
Die SuS... ... untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben, ... erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen, ... bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen.	**Modellieren** Die SuS... ... treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren),* ... erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren), ... beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren).*		Anhand verschiedener Glücksspiele wird zunächst der Begriff der Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung des Mittelwertes bei empirischen Häufigkeitsverteilungen wird der Erwartungswert einer Zufallsgröße definiert. Das Grundverständnis von Streumaßen wird durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots reaktiviert. Über eingängige Beispiele von Verteilungen mit gleichem Mittelwert, aber unterschiedlicher Streuung, wird die Definition der Standardabweichung als mittlere quadratische Abweichung im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen motiviert; über gezielte Veränderungen der Verteilung wird ein Gefühl für die Auswirkung auf deren Kenngrößen entwickelt. Anschließend werden diese Größen zum Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und zu einfachen Risikoabschätzungen genutzt.

Thema: Treffer oder nicht? – Bernoulliexperimente und Binomialverteilungen

Zentrale Kompetenzen: Modellieren / Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Binomialverteilung

<table>
<tr><td colspan="5">Thema: Treffer oder nicht? – Bernoulliexperimente und Binomialverteilungen</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Zu entwickelnde Kompetenzen</td><td>Medien-einsatz</td><td>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</td></tr>
<tr><td>Inhaltsbezogene Kompetenzen:</td><td colspan="2">Prozessbezogene Kompetenzen:</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Die SuS...

… verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufalls-experimente,

… erklären die Binomialverteilung einschließlich der kombinatorischen Bedeutung der Binomialkoeffizienten und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,

… nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur</td><td>Modellieren

Die SuS...

… treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor,

… erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells,

… beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation.</td><td>Werkzeuge nutzen

Die SuS...

… verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
- Generieren von Zufallszahlen
- Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufalls-größen
- Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen.</td><td>GTR</td><td>Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet.

Durch Vergleich mit dem „Ziehen ohne Zurücklegen“ wird geklärt, dass die Anwendung des Modells ‚Bernoullikette’ eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d.h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.

Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung und der Binomial-koeffizienten bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation und die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an.

Die anschließende Vertiefung erfolgt in</td></tr>
</table>

Lösung von Problemstellungen.				unterschiedlichen Sachkontexten, deren Bearbeitung auf vielfältigen Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“).

Unterrichtsvorhaben XIII - LK

Thema: Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen

Zentrale Kompetenzen: Problemlösen / Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Binomialverteilung

Thema: Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen				
Zu entwickelnde Kompetenzen			**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**			
Die SuS... ... untersuchen den Einfluss der Parameter n und p auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung, ... bestimmen den Erwartungswert μ und die	**Modellieren** Die SuS... ... analysieren und strukturieren die Problemsituation, ... wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur,	**Werkzeuge nutzen** Die SuS... ... verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum - Variieren der Parameter von Binomialverteilungen,	GTR	Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR. Während sich die Berechnung des Erwartungswertes erschließt, kann die

Standardabweichung σ von (binomialverteilten) Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen, … nutzen die σ-Regeln für prognostische Aussagen, … nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen.	Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen, … erkennen Muster und Beziehungen, … entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, … nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Verallgemeinern), … interpretieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung.	- Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen, - Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (Erwartungswert, Standardabweichung), - Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen.		Formel für die Standardabweichung induktiv entdeckt werden: In einer Tabellenkalkulation wird bei festem n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit multipliziert. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen Parametern und die Formel $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$. Das Konzept der σ-Umgebungen wird durch experimentelle Daten abgeleitet. Es wird benutzt, um Prognoseintervalle anzugeben, den notwendigen Stichprobenumfang für eine vorgegebene Genauigkeit zu bestimmen und um das $\frac{1}{\sqrt{n}}$ - Gesetz der großen Zahlen zu präzisieren.

<u>Unterrichtsvorhaben XIV - LK</u>

Thema: Ist die Glocke normal?

Zentrale Kompetenzen: Modellieren / Problemlösen / Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Normalverteilung

Thema: Ist die Glocke normal?				
Zu entwickelnde Kompetenzen			**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**			
Die SuS... … unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion, … untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen, … beschreiben den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion (Gaußsche Glockenkurve).	**Modellieren** Die SuS... … erfassen und strukturieren [...] komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, … übersetzen [...] komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle, … erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells, … beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung, … reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen.	**Problemlösen** Die SuS... … erkennen Muster und Beziehungen, … entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, … wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen. **Werkzeuge nutzen** Die SuS... … verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum - Generieren von Zufallszahlen - Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen - Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen - Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen.	GTR	Normalverteilungen sind in der Stochastik bedeutsam, weil sich die Summenverteilung von genügend vielen unabhängigen Zufallsvariablen häufig durch eine Normalverteilung approximieren lässt. Dementsprechend beschließt die Fachkonferenz den Einstieg in dieses Unterrichtsvorhaben über die Untersuchung von Summenverteilungen. Mit einer Tabellenkalkulation werden die Augensummen von zwei, drei, vier… Würfeln simuliert, wobei in der grafischen Darstellung die Glockenform zunehmend deutlicher wird. Ergänzung für leistungsfähige Kurse: Gut geeignet ist auch die Simulation von Stichprobenmittelwerten aus einer (gleichverteilten) Grundgesamtheit. Ergebnisse von Schulleistungstests oder Intelligenztests werden erst vergleichbar, wenn man sie hinsichtlich Mittelwert und Streuung normiert, was ein Anlass dafür ist, mit den Parametern μ und σ zu experimentieren. Auch Untersuchungen zu Mess- und Schätzfehlern bieten einen anschaulichen, ggf. handlungsorientierten Zugang.

				Da auf dem GTR die Normalverteilung einprogrammiert ist, spielt die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung (Satz von de Moivre-Laplace) für die Anwendungsbeispiele im Unterricht eine untergeordnete Rolle. Dennoch sollte bei genügender Zeit deren Herleitung als Vertiefung der Integralrechnung im Leistungskurs thematisiert werden, da der Übergang von der diskreten zur stetigen Verteilung in Analogie zur Approximation von Flächen durch Produktsummen nachvollzogen werden kann. Die Visualisierung erfolgt mithilfe des GTR. Theoretisch ist von Interesse, dass es sich bei der Gaußschen Glockenkurve um den Graphen einer Randfunktion handelt, zu deren Stammfunktion (Gaußsche Integralfunktion) kein Term angegeben werden kann.

<u>Unterrichtsvorhaben XV - LK</u>

Thema: Signifikant und relevant? – Testen von Hypothesen

Zentrale Kompetenzen: Modellieren /Kommunizieren

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Testen von Hypothesen

Thema: Signifikant und relevant? – Testen von Hypothesen		

Zu entwickelnde Kompetenzen			**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**			
Die SuS... ... interpretieren Hypothesentests bezogen auf den Sachkontext und das Erkenntnisinteresse, ... beschreiben und beurteilen Fehler 1. und 2. Art.	**Modellieren** Die SuS... ... erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, ... übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle, ... arbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells, ... beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation.	**Kommunizieren** Die SuS... ... erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen auszunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen, ... formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege, ... führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei.	GTR	Zentral ist das Verständnis der Idee des Hypothesentests, d. h. mit Hilfe eines mathematischen Instrumentariums einzuschätzen, ob Beobachtungen auf den Zufall zurückzuführen sind oder nicht. Ziel ist es, die Wahrscheinlichkeit von Fehlentscheidungen möglichst klein zu halten. Die Logik des Tests soll dabei an datengestützten gesellschaftlich relevanten Fragestellungen, z. B. Häufungen von Krankheitsfällen in bestimmten Regionen oder alltäglichen empirischen Phänomenen (z. B. Umfrageergebnisse aus dem Lokalteil der Zeitung) entwickelt werden, sie wird abschließend in einem ‚Testturm' visualisiert. Im Rahmen eines realitätsnahen Kontextes werden folgende Fragen diskutiert: - Welche Hypothesen werden aufgestellt? Wer formuliert diese mit welcher Interessenlage? - Welche Fehlentscheidungen treten beim Testen auf? Welche Konsequenzen haben sie? Durch Untersuchung und Variation gegebener Entscheidungsregeln werden die Bedeutung des Signifikanzniveaus und der Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Fehlentscheidungen 1. und 2. Art zur Beurteilung des Testverfahrens erarbeitet. Einblick in Problemstellungen des Versicherungswesens und der Meinungsforschung

Unterrichtsvorhaben XV - LK

Thema: Von Übergängen und Prozessen

Zentrale Kompetenzen: Modellieren / Argumentieren

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt: Stochastische Prozesse

Thema: Von Übergängen und Prozessen			
Zu entwickelnde Kompetenzen		**Medien-einsatz**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen:	**Prozessbezogene Kompetenzen:**		

Die SuS... … beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen, … verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände), … erklären die Binomialverteilung einschließlich der kombinatorischen Bedeutung der Binomialkoeffizienten und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten, … nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen.	**Modellieren** Die SuS... … erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, … übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle, … erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells, … die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation.	**Argumentieren** Die SuS... … präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur, … nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen, … stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her, … überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können.	GTR	Der Auftrag an Schülerinnen und Schüler, einen stochastischen Prozess graphisch darzustellen, führt in der Regel zur Erstellung eines Baumdiagramms, dessen erste Stufe den Ausgangszustand beschreibt. Im Zusammenhang mit der Interpretation der Pfadregeln als Gleichungssystem können sie daraus die Matrix-Vektor-Darstellung des Prozesses entwickeln. Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung, absorbierender Zustand). Hier bietet sich eine Vernetzung mit der Linearen Algebra hinsichtlich der Betrachtung linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen an. Eine nicht obligatorische Vertiefungsmöglichkeit besteht darin, Ausgangszustände über ein entsprechendes Gleichungssystem zu ermitteln und zu erfahren, dass der GTR als Hilfsmittel dazu die inverse Matrix bereitstellt.

Unterrichtsvorhabenübergreifende Absprachen

1. Grundsätze der fachmethodischen und fachdidaktischen Arbeit

Hausaufgaben:

Es werden regelmäßig Hausaufgaben gestellt, die sowohl dazu dienen können, den Unterrichtsstoff zu festigen, als auch den für die nächste Stunde vorzubereiten. Die Hausaufgaben orientieren sich an den Leitlinien und den rechtlichen Vorgaben, die sich im Hausaufgabenkonzept des NLG wiederfinden.

Individuelle Förderung:

Um dem Anspruch der individuellen Förderung Rechnung zu tragen, werden im Unterricht und bei den häuslichen Aufgaben nach Möglichkeit Maßnahmen der Binnendifferenzierung berücksichtigt. Hierbei kann die Lehrkraft z.B. den Schwierigkeitsgrad von Aufgaben variieren und so differenzierte Aufgabenstellungen anbieten, die den unterschiedlichen Leistungsniveaus entsprechen. Auch können z.B. verschiedene Materialien und Methoden genutzt werden, um den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit zu geben, individuelle Lernwege zu gehen.

2. Leitmedien

Schulbuch:

Die Fachschaft Mathematik hat sich für das Lehrwerk „Neue Wege“ in allen Jahrgangsstufen der Sekundarstufe I entscheiden und hält diese im Klassensatz für die Grundkurse vor. Die Wahl des Lehrmittels im Leistungskurs obliegt der unterrichtenden Lehrkraft.

Taschenrechner:

Als grafikfähigen Taschenrechner wurde an der Schule der „Casio CG 20“ angeschafft. Die Pflicht zur Nutzung des GTR läuft aus. Die Fachschaft Mathematik wartet auf Spezifizierungen zu dem angekündigten Einsatz eines „modularen Mathematik-Systems“ (MMS). Bis zur Klärung verwenden die Schüler*innen mit Blick auf das Abitur einen Wissenschaftlichen Taschenrechner (WTR), der jahrgangsverbindlich in der Sek I angeschafft wird.

3. Leistungsbewertung

Grundsätze der Leistungsbewertung:

Die rechtlich verbindlichen Grundsätze der Leistungsbewertung sind im Schulgesetz (§ 48 SchulG) sowie in der Ausbildungs- und Prüfungsordnung für die Sekundarstufe II (§ 13ff. APO GOSt) dargestellt. Für die Gesamtnote sind die Leistungen im Bereich der Sonstigen Mitarbeit und die schriftlichen Leistungen gleichwertig zu berücksichtigen. Den prozessbezogenen Kompetenzen kommt der gleiche Stellenwert zu wie den inhaltsbezogenen Kompetenzen.

Die Bewertungsgrundlagen für die Sonstige Mitarbeit entsprechen dabei denen der Sekundarstufe I. Allerdings besteht für die Schüler*innen in der Oberstufe eine verstärkte „Bringpflicht". Schüler*innen sind also verpflichtet, in stärkerem Maße als in der Sekundarstufe I Leistungsnachweise auch im Bereich der Sonstigen Mitarbeit zu erbringen. Lehrer*innen sind im Gegenzug nicht mehr dazu verpflichtet, sich bei Schüler*innen durch Maßnahmen wie Aufforderungen zur Mitarbeit oder Heftkontrolle einen Überblick über den individuellen Leistungsstand zu verschaffen. Die Einführungsphase betrachten wir in dieser Hinsicht als Übergangsphase.

Notenstufen in der Einführungsphase:

In der Einführungsphase werden in Klausuren die Zensuren nach folgendem Schema vergeben. Die Tabelle entspricht der Tabelle der Qualifikationsphase, allerdings gilt in der Einführungsphase die Zensur „ausreichend minus" noch nicht als Defizit. Abweichungen von der Tabelle sind in Ausnahmefällen möglich.

Prozentschwelle	**Zensur**
95	sehr gut plus
90	sehr gut
85	sehr gut minus
80	gut plus
75	gut
70	gut minus
65	befriedigend plus
60	befriedigend
55	befriedigend minus
50	ausreichend plus
45	ausreichend
40	ausreichend minus
34	mangelhaft plus
26	mangelhaft
20	mangelhaft minus
0	ungenügend

Notenstufen in der Qualifikationsphase:

In der Qualifikationsphase findet folgende Tabelle Verwendung. Eine Bepunktung mit 4 Punkten („ausreichend minus") gilt im Gegensatz zu Einführungsphase als Defizit. Abweichungen von der Tabelle sind in Ausnahmefällen möglich.

Prozentschwelle	**Notenpkt.**	**Zensur**
95	15	sehr gut plus
90	14	sehr gut
85	13	sehr gut minus
80	12	gut plus
75	11	gut
70	10	gut minus
65	9	befriedigend plus
60	8	befriedigend
55	7	befriedigend minus
50	6	ausreichend plus
45	5	ausreichend
40	4	ausreichend minus
34	3	mangelhaft plus
26	2	mangelhaft
20	1	mangelhaft minus
0	0	ungenügend

4. Anzahl und Dauer von Klausuren

Jede Klausur in der Sekundarstufe II soll einen Hilfsmittelfreien Teil enthalten. In der Regel werden dabei beide Klausurteile zu Beginn der Klausur ausgeteilt; die Schüler*innen erhalten dann die zugelassenen Hilfsmittel bei Abgabe aller Materialien des Hilfsmittelfreien Teils.

<u>Klausuren in der Einführungsphase:</u>

In der Einführungsphase werden vier Klausuren geschrieben. Die Klausuren haben eine Länge von 90 Minuten. Die vierte Klausur ist eine landesweite Vergleichsklausur.

<u>Klausuren in der Qualifikationsphase:</u>

In der Qualifikationsphase werden in den ersten drei Halbjahren jeweils zwei Klausuren geschrieben. Auch im Fach Mathematik kann dabei eine Klausur durch eine Facharbeit ersetzt werden. Im vierten Halbjahr schreiben gemäß den Vorgaben der APO-GOSt nur noch diejenigen Schüler*innen eine Klausur, die das Fach Mathematik als schriftliches Abiturfach belegen. Diese Klausur findet unter den Bedingungen des Abiturs statt. Die Auswahlmöglichkeiten im Hilfsmittelfreien Teil dieser Klausur werden dazu gegenüber dem Abitur reduziert. Hierzu werden Absprachen zwischen den unterrichtenden Kolleg*innen angestrebt.

<u>Klausurdauer in der Qualifikationsphase</u>:

Kurse	**Q1.1**	**Q1.2**	**Q2.1**	**Q2.2**
LK	135‘	1. Klausur: 135‘ 2. Klausur: 180‘	225‘	300‘
GK	90‘	90‘	1. Klausur: 135‘ 2. Klausur: 180‘	255‘